Introduzione alla trigonometria

1 Angoli e loro misure

In questa unità introdurremo e studieremo una classe di funzioni che non hai ancora incontrato, le **funzioni goniometriche**. Esse sono importanti soprattutto perché costituiscono uno strumento matematico indispensabile per l'ideazione e lo studio di modelli matematici con i quali si rappresentano numerosi fenomeni fisici.

Per introdurre queste funzioni è necessario rivedere anzitutto i concetti di *angolo* e di *misura di un angolo*.

Definizione dinamica di angolo

In vista delle nozioni che introdurremo nel proseguimento di questa unità, d'ora in avanti sarà utile osservare un angolo da un nuovo punto di vista, non «statico», ma «dinamico»: sarà utile cioè pensare un angolo come descritto dalla *rotazione* di un suo lato intorno al vertice. In quest'ottica la semiretta che viene fatta ruotare viene chiamata **primo lato dell'angolo** (o **lato origine**) e la semiretta ottenuta dopo aver effettuato la rotazione viene chiamata secondo lato dell'angolo (o **lato termine**), come illustrato in **fig. 1**. Un angolo viene allora detto in **posizione normale** quando è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali rispetto al quale il vertice coincide con l'origine degli assi e il primo lato coincide con il semiasse delle x positive, come illustrato in **fig. 2**.

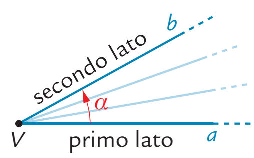


Figura 1 Definizione «dinamica» di angolo.

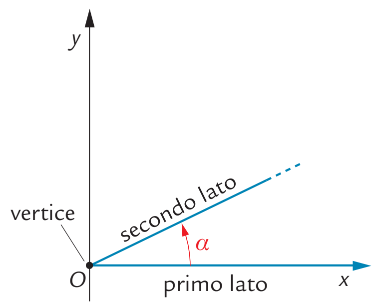


Figura 2 Un angolo in posizione normale.

Misure di angoli in gradi

Fino a questo punto dei tuoi studi hai misurato gli angoli in gradi. Il **grado**, ricordiamo, è definito come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro ed è indicato nelle misure con un piccolo cerchietto che segue il valore numerico: °.

Il sistema di misurazione degli angoli in cui l'unità di misura è il grado è detto **sistema sessagesimale**. In esso ogni grado viene suddiviso in 60 parti, ciascuna chiamata **minuto**, indicata con un apice:

$$1 \text{ minuto} = 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

Ogni minuto viene a sua volta suddiviso in 60 parti, ciascuna delle quali è chiamata **secondo** ed è indicata con due apici:

$$1 \text{ secondo} = 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$

Introduzione alla trigonometria

Per esempio, per indicare che un angolo misura 40 gradi, 15 minuti e 35 secondi si scrive che la sua misura è:

$$40°\ 15'\ 35''$$

In sintesi:

$$\boxed{1 \text{ angolo giro} = 360°; \quad 1° = 60'; \quad 1' = 60''}$$

Come sottomultipli del grado, invece dei primi e dei secondi si può considerare la sua decima parte, la sua centesima parte, e così via. In tal caso si ottiene una misura in gradi espressa in **forma decimale**. Poiché le calcolatrici scientifiche eseguono le operazioni sulle misure in gradi espresse in forma decimale, si pone talvolta il problema di convertire una misura in gradi, primi e secondi in gradi decimali, e viceversa. Vediamo come procedere tramite un esempio.

Il sistema di misura in gradi decimali viene detto sessa*decimale*, anziché sessa*gesimale*.

ESEMPI **Dai gradi decimali ai gradi, primi e secondi e viceversa**

Convertiamo:

a. la misura di $45°\ 12'\ 21''$ in gradi decimali;

b. la misura di $21{,}347°$ in gradi, primi e secondi.

a. Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ e $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, abbiamo:

$$45°\ 12'\ 21'' =$$

$$= 45° + 12' + 21'' =$$

$$= 45° + 12 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 21 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} \simeq$$

$$\simeq 45° + 0{,}2° + 0{,}005833° =$$

Con una calcolatrice si trova che $\frac{12}{60} = 0{,}2$ e $\frac{21}{3600} = 0{,}0058\overline{3}$

$$= 45{,}205833°$$

b. Procediamo come segue:

$$21{,}347° = 21° + 0{,}347° =$$

$$= 21° + 0{,}347 \cdot 60' =$$

Ricorda che $1° = 60'$

$$= 21° + 20{,}82' = 21° + 20' + 0{,}82' =$$

$$= 21° + 20' + 0{,}82 \cdot 60'' =$$

Ricorda che $1' = 60''$

$$= 21° + 20' + 49{,}2'' \simeq$$

$$\simeq 21°\ 20'\ 49''$$

Arrotondando il numero dei secondi a meno dell'unità

Misure di angoli in radianti

Le misure degli angoli espresse in gradi vengono utilizzate soprattutto nelle applicazioni pratiche. Nelle discipline scientifiche e nel proseguimento dei tuoi corsi di Matematica (per esempio nello studio dell'analisi matematica che intraprenderemo nel prossimo volume) è più conveniente invece misurare gli angoli **in radianti**.

Per definire la misura in radianti di un angolo pensiamo che l'angolo sia in posizione normale e consideriamo la circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo (cioè nell'origine) e **di raggio 1**: tale circonferenza viene detta **circonferenza goniometrica**. Si può allora dare la seguente definizione.

MISURA DI UN ANGOLO IN RADIANTI
La misura di un angolo in **radianti** è la misura dell'arco che esso intercetta sulla circonferenza goniometrica, una volta che l'angolo sia posto in posizione normale (**fig. 3**).

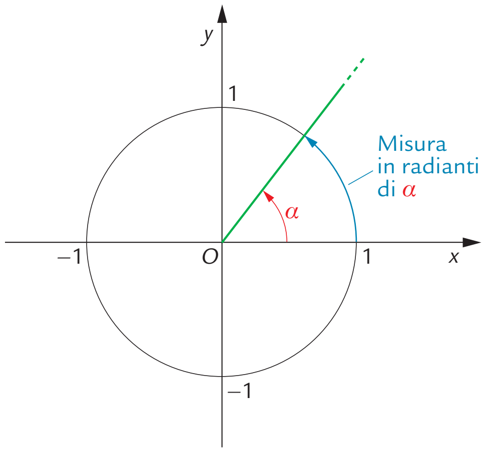


Figura 3

ESEMPI **Misure di angoli in radianti**

a. Un **angolo retto** individua sulla circonferenza goniometrica un arco la cui misura è un quarto della circonferenza, cioè $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$, quindi la misura in radianti di un **angolo retto** è $\frac{\pi}{2}$.

b. Un angolo piatto individua sulla circonferenza goniometrica una semicirconferenza, la cui misura è $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$, quindi la misura in radianti di un **angolo piatto** è π.

c. Un angolo giro individua sulla circonferenza goniometrica l'intera circonferenza, la cui misura è 2π, quindi la misura in radianti dell'**angolo giro** è 2π.

Per convertire la misura α° di un generico angolo, espressa in *gradi*, nella corrispondente misura α_{rad} in *radianti* si può usare la seguente proporzione:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \alpha_{rad} : 2\pi$$

Da essa seguono le seguenti formule di conversione:

$$\boxed{\alpha^\circ = \alpha_{rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}}$$

$$\boxed{\alpha_{rad} = \alpha^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}} \qquad [1]$$

ESEMPIO **Conversione dai gradi ai radianti e viceversa**

Determiniamo:

a. la misura in gradi dell'angolo che misura $\frac{\pi}{3}$ radianti;

b. la misura in radianti dell'angolo che misura 135°.

a. Per la prima formula **[1]** abbiamo: $\alpha^\circ = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{180^\circ}^{60^\circ}}{\cancel{\pi}} = 60^\circ$

b. Per la seconda formula **[1]** abbiamo: $\alpha_{rad} = \cancel{135^\circ}^{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{180^\circ}^{4}} = \frac{3}{4}\pi$

Come avrai notato, quando gli angoli vengono misurati in gradi si è soliti indicare esplicitamente l'unità di misura (cioè il grado, indicato con il simbolo °), mentre quando vengono misurati in radianti si è soliti trascurare l'unità di misura (cioè l'angolo di 1 radiante, indicato con 1 rad).

Nella **fig. 4** sono invece visualizzate le misure, in gradi e radianti, degli angoli più comuni.

> Spesso identificheremo un angolo con la sua misura (in gradi o in radianti); scriveremo per esempio $\alpha = \frac{\pi}{3}$, per indicare che α è un angolo la cui misura (in radianti) è $\frac{\pi}{3}$, oppure $\alpha \in (0, \pi)$ per indicare che α è un angolo la cui misura (in radianti) è compresa tra 0 e π.

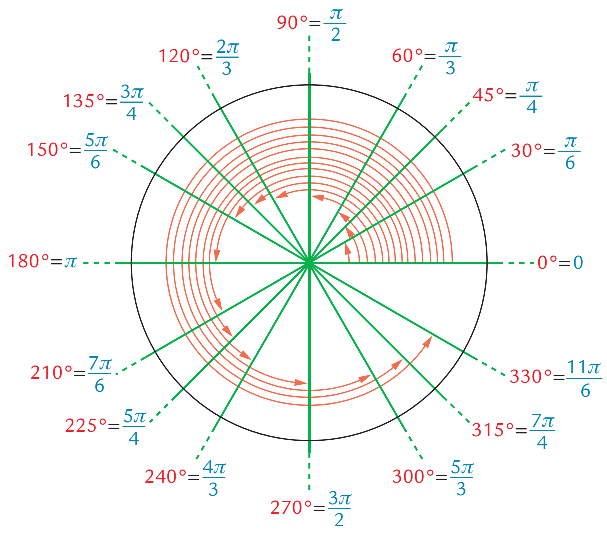


Figura 4 Misure di angoli notevoli.

Misura relativa di un angolo e misure di angoli maggiori dell'angolo giro

L'interpretazione «dinamica» di un angolo come descritto dalla *rotazione* di una semiretta intorno al suo vertice apre alcuni nuovi scenari:

1. da una parte, pone il problema di precisare il concetto di misura di un angolo in modo da tenere conto del *verso* della rotazione e porta così a introdurre il concetto di *misura relativa* di un angolo;
2. dall'altra, apre la possibilità di estendere il concetto stesso di angolo considerando angoli *maggiori* di un angolo giro.

Vediamo, nell'ordine, come sia possibile affrontare questi due argomenti.

1. Per assegnare a un angolo una **misura relativa** (cioè con segno) occorre anzitutto *orientare* l'angolo, cioè fissare il suo *primo lato*; dopodichè si considera la **misura assoluta** (cioè senza segno) dell'angolo (in gradi o in radianti) e si attribuisce a essa:

- segno *più* se la rotazione che occorre compiere per sovrapporre il primo lato dell'angolo al secondo è *antioraria*;
- segno *meno* se la rotazione che occorre compiere per sovrapporre il primo lato dell'angolo al secondo è *oraria*.

Osserva gli esempi in **fig. 5**.

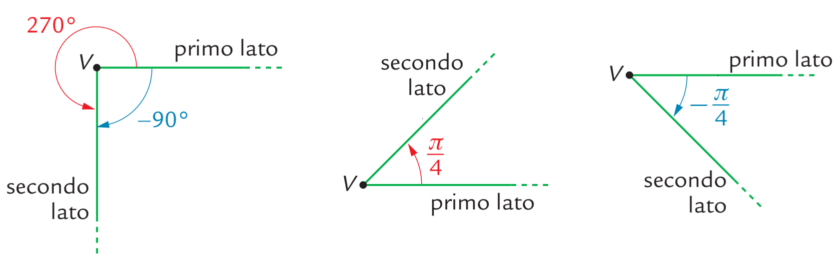


Figura 5

2. Per introdurre **angoli maggiori di un angolo giro** fissiamo l'attenzione su un angolo (orientato) in cui il primo lato è la semiretta *a* e il secondo lato è la semiretta *b*, descritto dalla rotazione in senso antiorario della semiretta *a*. Sia α la misura in gradi dell'angolo (**fig. 6a**).

Se supponiamo che la semiretta a, nella sua rotazione in senso antiorario, non si fermi la prima volta che raggiunge b ma percorra un giro completo fino a ritornare nuovamente in b, si genera ancora un angolo in cui il primo lato è a e il secondo lato è b, ma a questo nuovo angolo dovremo assegnare una misura che tenga conto del giro in più fatto. È naturale assegnare a tale angolo la misura (in gradi) di $\alpha + 360°$ (**fig. 6b**), dove il segno *positivo* tiene conto del fatto che il giro in più è stato effettuato in senso *antiorario*.

Se la semiretta a ruotasse invece in senso *orario* fino a raggiungere b, allora verrebbe descritto un angolo la cui misura, in gradi, sarebbe $\alpha - 360°$: infatti la misura *assoluta* dell'angolo sarebbe $360° - \alpha$, mentre la misura relativa è l'opposto perché tiene conto del fatto che la rotazione della semiretta a è avvenuta questa volta in senso *orario*, cioè nel verso *negativo* (**fig. 6c**).

Più in generale, se la semiretta a ruota in senso *antiorario* fino a sovrapporsi alla semiretta b, in funzione del numero di giri effettuati otterremo angoli le cui misure in gradi sono, ordinatamente:

$$\alpha, \quad \alpha + 360°, \quad \alpha + 2 \cdot 360°, \quad \alpha + 3 \cdot 360°, \quad \alpha + 4 \cdot 360°, \quad \ldots$$

Se invece la semiretta a ruota in senso *orario* fino a sovrapporsi alla semiretta b, in funzione del numero di giri effettuati otterremo angoli le cui misure in gradi sono, ordinatamente:

$$\alpha - 360°, \quad \alpha - 2 \cdot 360°, \quad \alpha - 3 \cdot 360°, \quad \alpha - 4 \cdot 360°, \quad \ldots$$

Gli infiniti angoli che così si ottengono possono dunque essere rappresentati in forma sintetica con la scrittura:

$\alpha + k360°$ al variare di k in $\mathbf{Z}$

Se la misura α dell'angolo fosse espressa in radianti anziché in gradi, la scrittura sintetica sarebbe invece:

$\alpha + 2k\pi$ al variare di k in $\mathbf{Z}$

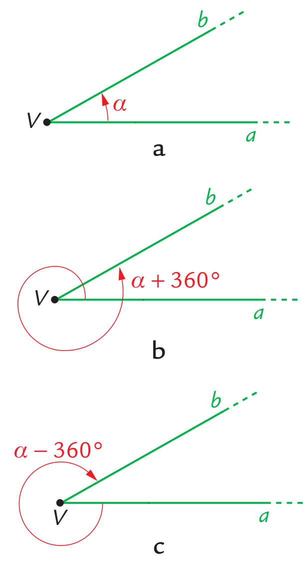
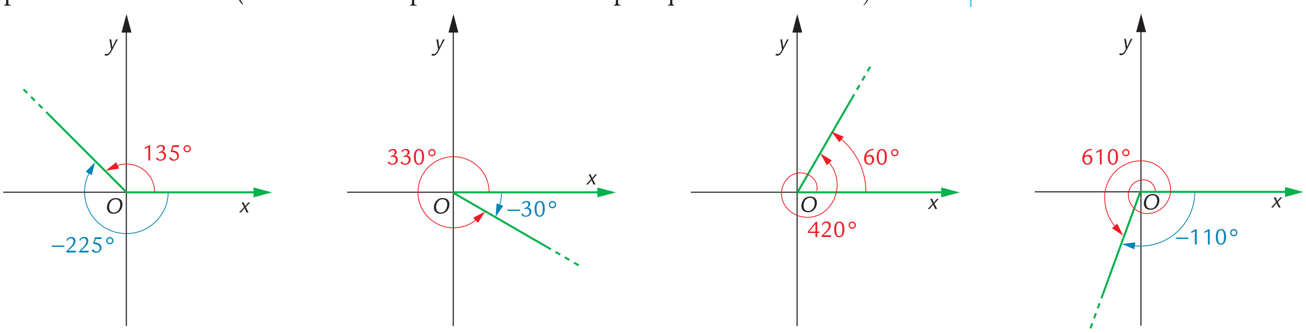


Figura 6

ESEMPI **Misure di angoli orientati e di angoli maggiori di un angolo giro**

Nelle seguenti figure puoi osservare alcune misure di angoli orientati, posti in posizione normale (ricorda che il primo lato è sempre quello sull'asse x).



prova tu

1. Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°? E di un angolo di 330°?
2. Qual è la misura in gradi di un angolo che, in radianti, misura $\frac{5\pi}{4}$? E di un angolo che misura $\frac{7\pi}{8}$?
3. Considera due semirette a e b, fra loro ortogonali, di origine O. La semiretta a (semiretta origine) ruota intorno a O in senso *antiorario* fino a raggiungere b, poi effettua, a partire da b, altri 3 giri completi intorno a O e si arresta. Quanto misura, in radianti, l'angolo così generato?
4. Rispondi a un quesito analogo a quello precedente nel caso in cui la semiretta a ruoti in senso *orario*.

ESERCIZI ➡➡➡➡
Gli esercizi relativi a questo paragrafo sono a p. **19**

2 Le funzioni goniometriche

In questo secondo paragrafo vedremo come sia possibile associare a ogni angolo tre numeri, detti **seno**, **coseno** e **tangente** dell'angolo, che dipendono esclusivamente dall'*ampiezza* dell'angolo stesso.

L'introduzione del seno, del coseno e della tangente di un angolo ci consentirà di definire delle nuove funzioni e, come vedremo più avanti, di mettere in relazione le misure dei lati di un triangolo con le misure dei suoi angoli.

Definizioni di seno, coseno e tangente di un angolo

Dato un angolo α, riferiamolo a un sistema di assi cartesiani ortogonali in modo che si trovi in posizione normale e tracciamo la circonferenza goniometrica. Il seno, il coseno e la tangente di α sono definiti come segue (**fig. 7**).

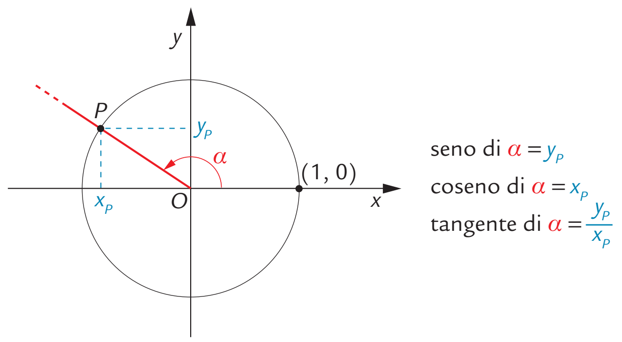


Figura 7 Funzioni goniometriche di un angolo.

SENO, COSENO E TANGENTE DI UN ANGOLO

Dato un angolo α in posizione normale, sia P il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica. Chiamiamo:

- **seno** di α l'**ordinata** di P;
- **coseno** di α l'**ascissa** di P;
- **tangente** di α il **rapporto tra l'ordinata e l'ascissa** di P.

Indicheremo il seno di α con il simbolo **sin** α, il coseno di α con il simbolo **cos** α e la tangente di α con il simbolo **tan** α.

Poiché il seno, il coseno e la tangente di un angolo α variano *in funzione* dell'angolo, vengono chiamate **funzioni goniometriche** di α.

Alcuni testi utilizzano per il seno la notazione **sen** e per la tangente la notazione **tg**. Noi abbiamo utilizzato le notazioni più diffuse nella moderna letteratura scientifica; tali notazioni sono anche quelle utilizzate dalle calcolatrici.

È importante fare subito alcune osservazioni.

- Il punto P, le cui coordinate definiscono il coseno e il seno di α, viene detto **punto associato** all'angolo α. Poiché P appartiene alla circonferenza goniometrica (che è di raggio 1), l'ascissa di P (cioè il coseno di α) e l'ordinata di P (cioè il seno di α) variano tra -1 e 1, potendo anche essere uguali a -1 o a 1. Dunque per ogni angolo α si ha:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

- La tangente di un angolo, essendo definita come *rapporto* tra seno e coseno dell'angolo, è definita purché il coseno dell'angolo sia *diverso da zero*:

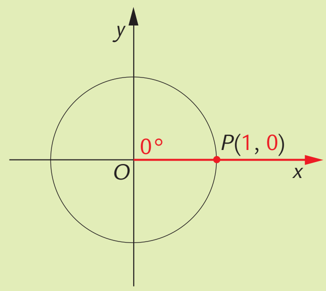
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ è definita per } \alpha \text{ tali che } \cos\alpha \neq 0$$

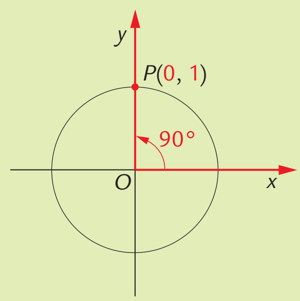
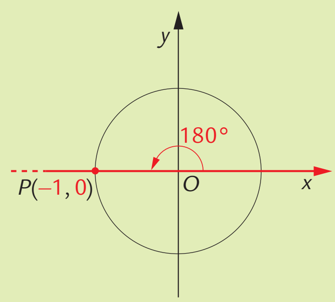
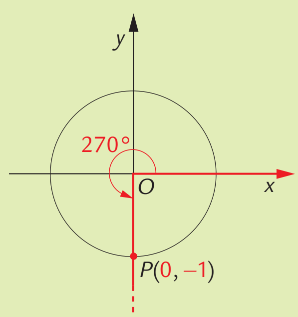
■ Calcolo delle funzioni goniometriche di un angolo

Dato un angolo, come possiamo determinarne il seno, il coseno e la tangente? In generale, per determinare i valori delle funzioni goniometriche di un angolo *qualsiasi* bisogna ricorrere a una calcolatrice. In alcuni **casi particolari**, che capitano di frequente, è possibile tuttavia ricavare le funzioni goniometriche dell'angolo direttamente dalla definizione.

1. Seno, coseno e tangente degli angoli che hanno i lati sugli assi

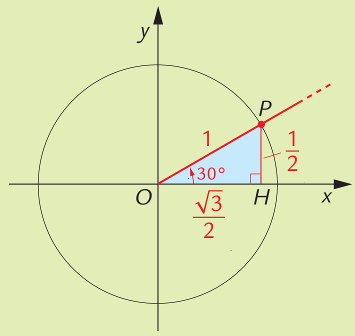
Determiniamo, se esistono, il seno, il coseno e la tangente degli angoli di misura uguale a 0°, 90°, 180°, 270°.

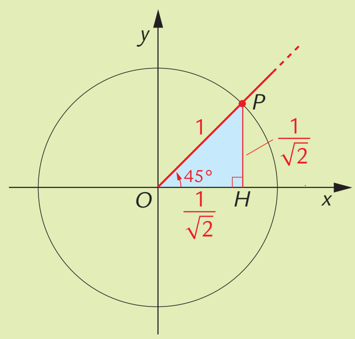
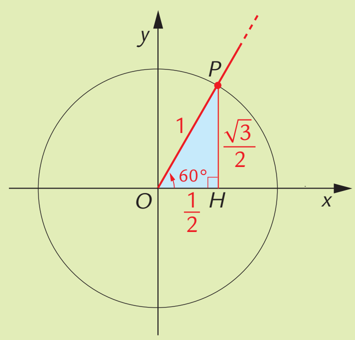
Misura dell'angolo (in gradi e in radianti)	Funzioni goniometriche	Rappresentazione grafica
$\alpha = 0° = 0$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle x positive e incontra la circonferenza goniometrica nel punto $P(1, 0)$, quindi: ▸ $\sin 0° = \sin 0 = 0$ ▸ $\cos 0° = \cos 0 = 1$ ▸ $\tan 0° = \tan 0 = \frac{0}{1} = 0$	

Misura dell'angolo (in gradi e in radianti)	Funzioni goniometriche	Rappresentazione grafica
$\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle y positive e interseca la circonferenza goniometrica nel punto $P(0, 1)$, quindi: ▸ $\sin 90° = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ▸ $\cos 90° = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ ▸ $\tan 90° = \tan\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ non esiste! La tangente di 90° non è definita, perché non è definita la divisione per 0.	
$\alpha = 180° = \pi$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle x negative e interseca la circonferenza goniometrica nel punto $P(-1, 0)$, quindi: ▸ $\sin 180° = \sin\pi = 0$ ▸ $\cos 180° = \cos\pi = -1$ ▸ $\tan 180° = \tan\pi = \frac{0}{-1} = 0$	
$\alpha = 270° = \frac{3\pi}{2}$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle y negative e interseca la circonferenza goniometrica nel punto $P(0, -1)$, quindi: ▸ $\sin 270° = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ▸ $\cos 270° = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ ▸ $\tan 270° = \tan\frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{0}$ non esiste! La tangente di 270° non è definita, perché non è definita la divisione per 0.	

2. Seno, coseno e tangente degli angoli di 30°, 45° e 60°

Determiniamo il seno, il coseno e la tangente degli angoli di misura uguale a 30°, 45° e 60°.

Misura dell'angolo (in gradi e in radianti)	Funzioni goniometriche	Rappresentazione grafica
$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$	Osserviamo che nel triangolo OPH è $\overline{OP} = 1$. Ricordando le relazioni che sussistono tra le misure dei lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°, deducimo che: $\overline{PH} = \frac{1}{2}$ e $\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi: ▸ $\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ▸ $\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ▸ $\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	

Misura dell'angolo (in gradi e in radianti)	Funzioni goniometriche	Rappresentazione grafica
$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$	Osserviamo che nel triangolo OPH è $\overline{OP} = 1$. Ricordando le relazioni che sussistono tra le misure dei lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 45°, deduciamo che: $\overline{OH} = \overline{PH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Dunque $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, quindi: ▸ $\sin 45° = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ▸ $\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ▸ $\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	
$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$	Osserviamo che nel triangolo OPH è $\overline{OP} = 1$. Ricordando le relazioni che sussistono tra le misure dei lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°, deduciamo che: $\overline{OH} = \frac{1}{2}$ e $\overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Dunque $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, quindi: ▸ $\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ▸ $\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ▸ $\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	

sintesi: FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI NOTEVOLI

▶ **Angoli con i lati sugli assi cartesiani**

α	sin α	cos α	tan α
$0°$	0	1	0
$90°$	1	0	Non definita
$180°$	0	-1	0
$270°$	-1	0	Non definita
$360°$	0	1	0

▶ **Angoli di 30°, 45°, 60°**

α	sin α	cos α	tan α
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

3. Seno, coseno e tangente di angoli qualsiasi

Vediamo infine come si può utilizzare una calcolatrice per il calcolo del seno, del coseno della tangente di angoli qualsiasi.

ESEMPIO **Calcolo di funzioni goniometriche tramite la calcolatrice**

Calcoliamo, ricorrendo a una calcolatrice:

a. $\sin 25{,}6°$ **b.** $\cos(15°\,20'\,10'')$ **c.** $\tan\frac{3\pi}{5}$

a. Occorre anzitutto controllare che sul display della calcolatrice compaia la scritta «DEG»: ciò significa che stiamo lavorando con misure di angoli espresse in gradi. In caso contrario, bisogna passare al sistema sessadecimale utilizzato dalla calcolatrice, premendo più volte sulla calcolatrice il tasto [DRG]. Una volta che ciò sia stato accertato, digitiamo **25.6** e poi premiamo il tasto [SIN].
Otteniamo così che $\sin 25{,}6° = 0{,}4320857488...$ Arrotondando a meno di un centesimo, possiamo scrivere che

$$\sin 25{,}6° \simeq 0{,}43$$

b. Occorre preliminarmente trasformare la misura data da gradi, primi e secondi a gradi decimali. Possiamo effettuare questa operazione ricordando che:

$$15°\,20'\,10'' = \left(15 + \frac{20}{60} + \frac{10}{3600}\right)^{\circ}$$

Calcoliamo:

$$15 + \frac{20}{60} + \frac{10}{3600} \simeq 15{,}33611111$$

Ottenuto questo valore, è sufficiente premere il tasto [COS].
La trasformazione da gradi, primi e secondi a gradi decimali può essere effettuata anche in modo automatico, se la calcolatrice che stiamo utilizzando possiede il tasto [DMS-DD]. In tal caso bisogna digitare le cifre dei gradi, poi il punto decimale, quindi far seguire le cifre dei primi e dei secondi. La

sequenza di operazioni da svolgere è quindi la seguente:

si digita **15.2010**, si preme il tasto $\boxed{\text{DMS-DD}}$ e infine il tasto $\boxed{\text{COS}}$.

In ogni caso, otterremo:

$\cos 15° \, 20' \, 10'' = 0{,}9643909188...$

Arrotondando a meno di un centesimo:

$\cos 15° \, 20' \, 10'' \simeq 0{,}96$

c. Controlliamo che sul display compaia la scritta RAD (in caso contrario, premiamo il tasto $\boxed{\text{DRG}}$ finché non compare tale scritta). Poi premiamo la seguente sequenza di tasti:

$\boxed{\pi} \; \boxed{\times} \; \boxed{3} \; \boxed{\div} \; \boxed{5} \; \boxed{\text{TAN}}$

Otterremo così:

$\tan \dfrac{3\pi}{5} = -3{,}077683537...$

Arrotondando a meno di un centesimo:

$\tan \dfrac{3\pi}{5} \simeq -3{,}08$

Dalla funzione goniometrica all'angolo

Se è dato il seno o il coseno o la tangente di un angolo acuto, possiamo risalire alla misura dell'angolo con l'aiuto della calcolatrice, come mostriamo nel prossimo esempio.

ESEMPIO

Determiniamo con l'aiuto della calcolatrice la misura approssimata, sia in radianti sia in gradi, dell'angolo acuto α il cui seno è $\dfrac{1}{3}$.

1. Misura in radianti

Controlliamo anzitutto che sul display compaia la scritta RAD. Per determinare l'angolo richiesto, devi attivare la funzione inversa del seno, premendo, prima del tasto $\boxed{\text{SIN}}$, il tasto $\boxed{\text{INV}}$ o il tasto $\boxed{\text{2NDF}}$ a seconda della calcolatrice che stai utilizzando. La sequenza di operazioni che dovrai svolgere è quindi la seguente:

1. eseguire la divisione $1 \boxed{\div} 3$
2. premere il tasto contrassegnato con $\boxed{\text{INV}}$ o to $\boxed{\text{2NDF}}$
3. premere il tasto $\boxed{\text{SIN}}$

Si ottiene come risultato 0,3398369094 quindi, arrotondando alla seconda cifra decimale, possiamo scrivere che $\alpha \simeq 0{,}34$.

2. Misura in gradi

Procediamo in modo analogo al caso precedente, con l'accortezza però di impostare all'inizio la modalità DEG anziché RAD. Si ottiene che $\alpha \simeq 19{,}47°$. Il risultato espresso dalla calcolatrice in gradi decimali, può poi eventualmente essere convertito in gradi, primi e secondi.

Attenzione! In alcune calcolatrici per attivare le funzioni inverse del seno, del coseno e della tangente occorre utilizzare i tasti $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\tan^{-1}}$ indicati talvolta con $\boxed{\text{asin}}$, $\boxed{\text{acos}}$, $\boxed{\text{atan}}$.

Prime proprietà delle funzioni goniometriche

▸ Si può dimostrare che il seno e il coseno di un angolo α (qualsiasi) sono legati dalla relazione fondamentale:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

In particolare, se α è acuto, la giustificazione di questa relazione è immediata: basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH nella **figura 8**, osservando che:

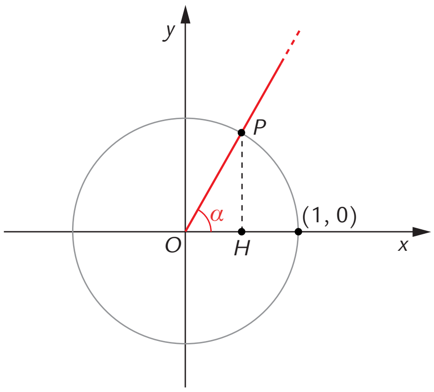


Figura 8

$$\overline{OP} = 1 \qquad \overline{OH} = \cos\alpha \qquad \overline{PH} = \sin\alpha$$

Notiamo che la relazione fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ consente di determinare il seno di un angolo, se è noto il coseno o, viceversa, di determinare il coseno, se è noto il seno.

▸ Dalle definizioni di seno e coseno segue immediatamente che l'angolo di misura $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, ha lo stesso seno e lo stesso coseno di α, ossia valgono le relazioni:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \text{e} \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

Per esprimere questa proprietà, si dice che il seno e il coseno sono funzioni **periodiche** di periodo 2π.
Si può dimostrare inoltre che l'angolo di misura $\alpha + k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, ha la stessa tangente di α, ossia vale la relazione:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$$

Per esprimere questa proprietà si dice che la tangente è una funzione **periodica** di periodo π.

prova tu

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a. $\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right)^2 - \left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}\right)^3$

b. $\dfrac{\sin 30° - \tan 45°}{\sin 60° + \tan 45°}$

ESERCIZI ➡ ➡ ➡ ➡
Gli esercizi relativi a questo paragrafo sono a p. **20**

3 I grafici delle funzioni goniometriche

Abbiamo definito le funzioni goniometriche come funzioni che associano a un dato angolo in posizione normale un numero reale (il seno, il coseno o la tangente dell'angolo). In base a queste definizioni il **dominio** delle funzioni goniometriche è quindi l'insieme formato dagli angoli in posizione normale, con l'esclusione degli angoli di misura $\frac{\pi}{2} + k\pi$ per la funzione tangente.

Vogliamo ora staccarci da questa definizione geometrica e considerare le funzioni seno, coseno e tangente come funzioni reali di variabile reale. Il passaggio dagli *angoli ai numeri reali* è naturale ed è già stato implicitamente compiuto nei paragrafi precedenti, ogniqualvolta abbiamo identificato un angolo con la sua misura. Sappiamo infatti che per ogni numero reale x esiste uno e un solo angolo (orientato) la cui misura, *in radianti*, è x. Possiamo quindi definire le tre **funzioni**:

$$y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = \tan x$$

che, dato un numero reale x, associano a esso rispettivamente il seno, il coseno e la tangente dell'angolo la cui misura, in radianti, è x.

In questo paragrafo studiamo le proprietà di queste funzioni e ne tracciamo il grafico nel piano cartesiano.

La funzione $y = \sin x$

Studiamo inizialmente la funzione $y = \sin x$. Sappiamo che il seno è periodico di periodo 2π, quindi è sufficiente tracciare il grafico di $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e poi completare il grafico su tutto l'asse reale tenendo conto della periodicità.

Costruiamo anzitutto la tabella seguente in cui, ricordando alcuni valori notevoli del seno, abbiamo elencato le coordinate di alcuni punti appartenenti al grafico della funzione.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

La tabella mostra, come abbiamo già osservato nel Paragrafo 3 studiando come varia il seno, che:

- quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$ il valore di $y = \sin x$ cresce da 0 a 1;
- quando x cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π il valore di $y = \sin x$ decresce da 1 a 0;
- quando x cresce da π a $\frac{3\pi}{2}$ il valore di $y = \sin x$ decresce da 0 a -1;
- quando x cresce da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π il valore di $y = \sin x$ cresce da -1 a 0.

Tracciando la curva che passa per i punti le cui coordinate sono riportate in tabella otteniamo il grafico della funzione seno nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (**fig. 9**).

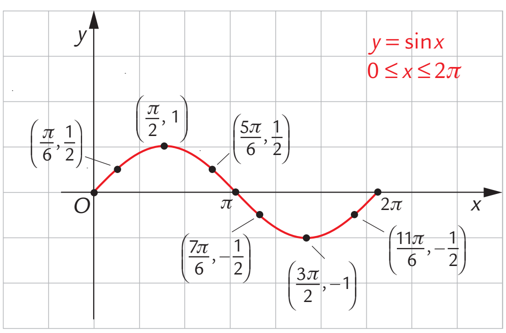


Figura 9

Ripetendo il grafico di $y = \sin x$ in tutti gli intervalli di lunghezza 2π precedenti e successivi a $[0, 2\pi]$ otteniamo il grafico della funzione seno (detto **sinusoide**) su tutto l'asse reale (**fig. 10**).

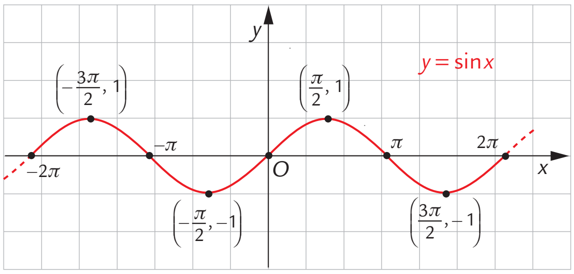


Figura 10

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE $y = \sin x$

a. La funzione $y = \sin x$ è definita per ogni valore reale di x, quindi il suo **dominio** è **R**; è periodica di **periodo** 2π.

b. La funzione $y = \sin x$ interseca l'asse x in infiniti punti, di ascissa $x = k\pi$; la funzione seno ha quindi infiniti **zeri**.

c. Il grafico della funzione $y = \sin x$ è simmetrico rispetto all'origine, quindi la funzione $y = \sin x$ è **dispari**.

d. La funzione $y = \sin x$ ha come **immagine** l'intervallo $[-1, 1]$, quindi è **limitata**.

e. Vi sono infiniti punti, di ascissa $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, in cui la funzione $y = \sin x$ assume valore **massimo** (uguale a 1) e infiniti, di ascissa $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, in cui assume valore **minimo** (uguale a -1).

La funzione $y = \cos x$

Anche per tracciare il grafico della funzione $y = \cos x$ ci limitiamo inizialmente a considerare l'intervallo $[0, 2\pi]$. Costruiamo a questo proposito la tabella seguente in cui, ricordando alcuni valori notevoli del coseno, abbiamo riportato le coordinate di alcuni punti appartenenti al grafico della funzione.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

La tabella mostra che:

- quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$ il valore di $y = \cos x$ decresce da 1 a 0;
- quando x cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π il valore di $y = \cos x$ decresce da 0 a -1;
- quando x cresce da π a $\frac{3\pi}{2}$ il valore di $y = \cos x$ cresce da -1 a 0;
- quando x cresce da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π il valore di $y = \cos x$ cresce da 0 a 1.

Tracciando la curva che passa per i punti aventi le coordinate in tabella otteniamo il grafico della funzione coseno nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (**fig. 11**).

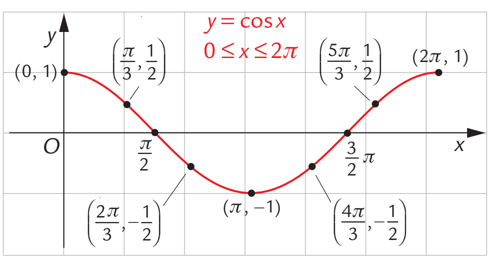


Figura 11

Ripetendo il grafico di $y = \cos x$ in tutti gli intervalli di lunghezza 2π precedenti e successivi a $[0, 2\pi]$ otteniamo il grafico della funzione coseno (detto **cosinusoide**) su tutto l'asse reale (**fig. 12**).

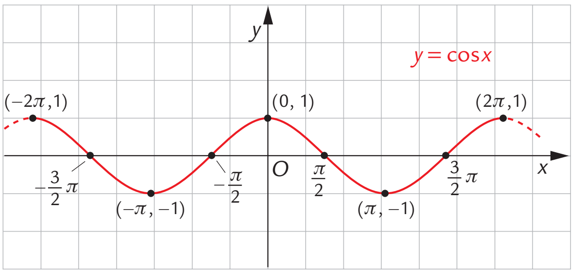


Figura 12

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE $y = \cos x$

a. La funzione $y = \cos x$ è definita per ogni valore reale di x, quindi il suo **dominio** è **R**; è periodica di **periodo** 2π.

b. La funzione $y = \cos x$ interseca l'asse x in infiniti punti di ascissa $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi ha infiniti **zeri**.

c. Il grafico della funzione $y = \cos x$ è simmetrico rispetto all'asse y, quindi la funzione $y = \cos x$ è **pari**.

d. La funzione $y = \cos x$ ha come **immagine** l'intervallo $[-1, 1]$, quindi è **limitata**.

e. Vi sono infiniti punti, di ascissa $x = 2k\pi$, in cui la funzione $y = \cos x$ assume valore **massimo** (uguale a 1) e infiniti punti, di ascissa $x = \pi + 2k\pi$, in cui assume valore **minimo** (uguale a -1).

La funzione $y = \tan x$

Tracciamo ora il grafico della funzione $y = \tan x$. Sappiamo che la tangente è periodica di periodo π, quindi basterà tracciarne il grafico nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e completare poi tale grafico su tutto l'asse reale tenendo conto della periodicità.

Costruiamo anzitutto la tabella seguente in cui, ricordando alcuni valori notevoli della tangente, abbiamo determinato le coordinate di alcuni punti appartenenti al grafico della funzione $y = \tan x$ nell'intervallo prescelto.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Come abbiamo osservato nel Paragrafo 3 studiando le variazioni della tangente di un angolo:

- quando x cresce da $-\frac{\pi}{2}$ a 0 il valore di $y = \tan x$ cresce da $-\infty$ a 0, perciò la retta di equazione $x = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale per la funzione;
- quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$ il valore di $y = \tan x$ cresce indefinitamente, da 0 a $+\infty$, perciò la retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale per la funzione.

Tenendo conto di queste osservazioni e dei punti per cui passa il grafico della funzione forniti dalla tabella (opportunamente approssimati), possiamo tracciarne il grafico (**fig. 13**).

Ripetendo il grafico di $y = \tan x$ in tutti gli intervalli di lunghezza π (precedenti e successivi a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) otteniamo infine il grafico della funzione tangente (detto **tangentoide**) su tutto l'asse reale (**fig. 14**).

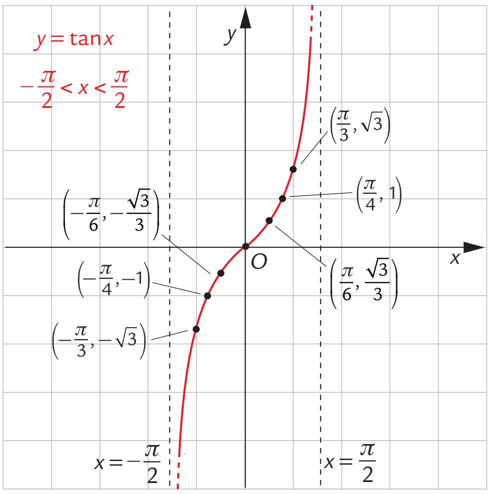


Figura 13

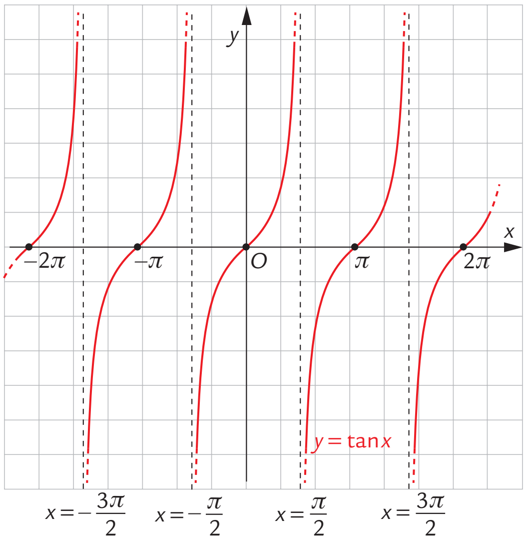


Figura 14

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE $y = \tan x$

a. La funzione $y = \tan x$ è definita per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi il suo **dominio** è $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$; è una funzione periodica di **periodo** π.

b. La funzione $y = \tan x$ interseca l'asse x in infiniti punti, di ascissa $x = k\pi$, quindi ha infiniti **zeri**.

c. La funzione $y = \tan x$ presenta infiniti **asintoti verticali**, di equazioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

d. Il grafico della funzione $y = \tan x$ è simmetrico rispetto all'origine, ossia la funzione $y = \tan x$ è **dispari**.

e. La funzione $y = \tan x$ ha come **immagine** tutto **R**, quindi **non** è una funzione limitata.

prova tu

Traccia, per punti, il grafico delle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato a fianco.

1. $y = 3 \sin x$ in $[0, 2\pi]$

2. $y = -4 \cos x$ in $[0, 2\pi]$

3. $y = -2 \tan x$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

[*Suggerimento*: nella tabella dei valori di x e y che devi costruire per tracciare il grafico della funzione, assegna a x i valori $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ per le funzioni **1** e **2** e i valori $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ per la funzione **3.**]

ESERCIZI ➡➡➡➡
Gli esercizi relativi a questo paragrafo sono a p. **22**

4 I teoremi sui triangoli rettangoli

In precedenza abbiamo introdotto le funzioni goniometriche degli angoli e abbiamo studiato alcune delle loro proprietà. Ora inizieremo lo studio della **trigonometria**, cioè di quella parte della matematica che tratta le relazioni fra le misure dei lati e le funzioni goniometriche degli angoli di un *triangolo*.

Premettiamo che d'ora in avanti adotteremo le seguenti convenzioni per indicare gli elementi di un triangolo di vertici A, B e C (**fig. 15**):

- con le lettere minuscole a, b, c indicheremo le misure dei *lati opposti*, rispettivamente, ai vertici A, B, C;
- con le lettere greche α, β, γ indicheremo gli *angoli* aventi vertici, rispettivamente, in A, B, C, o le loro misure.

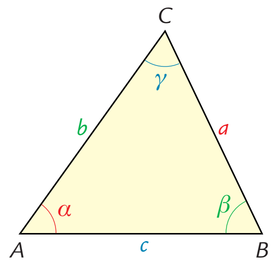


Figura 15

I teoremi fondamentali sui triangoli rettangoli

Iniziamo la nostra esplorazione della trigonometria a partire da una figura geometrica ben nota: il *triangolo rettangolo*. Supponiamo che il triangolo abbia l'angolo retto in A e indichiamo le misure dei lati e degli angoli secondo le convenzioni stabilite (**fig. 16**).

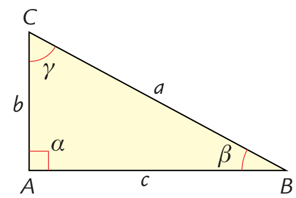


Figura 16

Riferiamo il triangolo a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale rispetto al quale l'angolo β si trovi in posizione normale; indichiamo con P il punto in cui la semiretta OC interseca la circonferenza goniometrica e con H la proiezione di P sull'asse x. A seconda che la misura dell'ipotenusa del triangolo sia minore o maggiore di 1 si possono ottenere i due casi rappresentati nelle **figg. 17a** e **17b**.

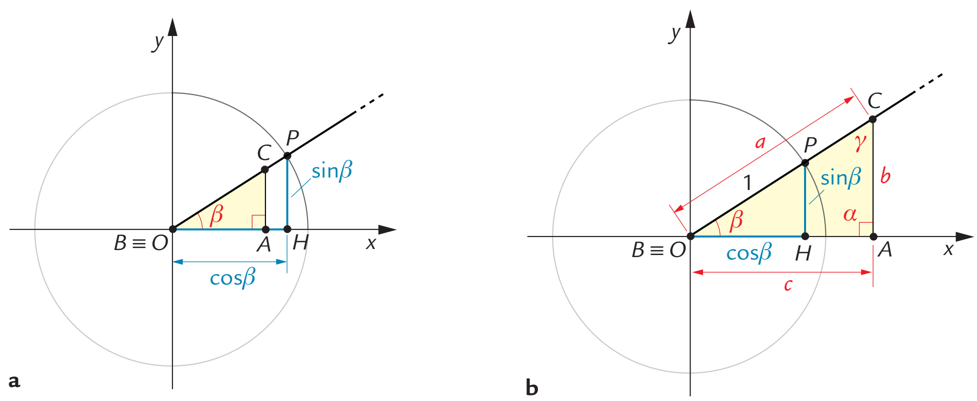


Figura 17

In entrambi i casi (fai riferimento alla seconda delle figure), il triangolo ABC è *simile* al triangolo HOP (perché?), quindi possiamo scrivere la proporzione:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{1} \qquad AC : BC = PH : OP$$

da cui si ricava:

$$\boxed{b = a \sin\beta} \tag{2}$$

Analogamente si potrebbe dimostrare che:

$$\boxed{b = a \cos\gamma} \tag{3}$$

Riflettiamo ora sulle due uguaglianze **[2]** e **[3]**, osservando la **fig. 18**.

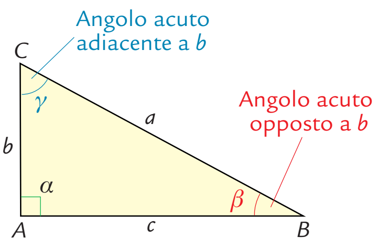


Figura 18

Ci possiamo rendere conto che:

$$\underbrace{b}_{\text{misura di un cateto}} = \underbrace{a}_{\text{misura dell'ipotenusa}} \cdot \underbrace{\sin\beta}_{\text{seno dell'angolo opposto al cateto}}$$

$$\underbrace{b}_{\text{misura di un cateto}} = \underbrace{a}_{\text{misura dell'ipotenusa}} \cdot \underbrace{\cos\gamma}_{\text{coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto}}$$

Ragionando in modo del tutto simile si potrebbe provare che valgono analoghe relazioni circa la misura c dell'altro cateto. Vale quindi il seguente teorema.

Primo teorema sui triangoli rettangoli — TEOREMA 1

In un triangolo rettangolo la misura di un **cateto** è uguale a quella dell'**ipotenusa** moltiplicata per il **seno dell'angolo opposto** al cateto, o moltiplicata per il **coseno dell'angolo acuto adiacente** al cateto.

Dal **teorema 1** seguono in particolare le due uguaglianze:

$$b = a\sin\beta$$
$$c = a\cos\beta$$

Dividendole membro a membro otteniamo:

$$\frac{b}{c} = \frac{a\sin\beta}{a\cos\beta} = \tan\beta$$

cioè:

$$\boxed{b = c\tan\beta} \qquad [4]$$

Riflettendo sulla **[4]**, osservando ancora la **fig. 18**, ci rendiamo conto che:

$$\underbrace{b}_{\text{misura di un cateto}} = \underbrace{c}_{\text{misura dell'altro cateto}} \cdot \underbrace{\tan\beta}_{\text{tangente dell'angolo opposto al primo cateto}}$$

Ragionando in modo del tutto simile si potrebbe provare che valgono analoghe relazioni circa la misura c dell'altro cateto. Vale quindi il seguente teorema.

Secondo teorema sui triangoli rettangoli — TEOREMA 2

In un triangolo rettangolo la misura di un **cateto** è uguale a quella dell'**altro cateto** moltiplicata per la **tangente dell'angolo opposto** al primo cateto.

Risoluzione di un triangolo rettangolo

I teoremi sui triangoli rettangoli possono essere utilizzati sia per determinare le *misure dei lati* di un triangolo rettangolo, sia (inversamente) per risalire alle *misure degli angoli* acuti di un triangolo rettangolo. Ciò consente di **risolvere un**

triangolo rettangolo, cioè di determinarne le misure di tutti i lati e tutti gli angoli, una volta noti *due* elementi del triangolo, *fra cui almeno un lato*.

Analizziamo tramite alcuni esempi i vari casi che si possono presentare.

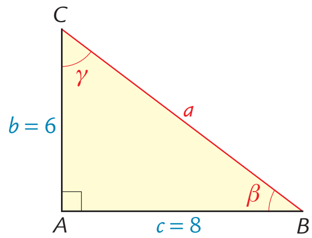
ESEMPIO Risoluzione di un triangolo rettangolo, dati i due cateti

Risolviamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo le misure dei due cateti: $b = 6$, $c = 8$.

▸ Applicando il teorema di Pitagora al triangolo possiamo ricavare la misura dell'ipotenusa:

$$a = \sqrt{36 + 64} = 10$$

Le misure dei lati sono così determinate.



▸ Per ricavare le misure degli angoli acuti del triangolo applichiamo i teoremi sui triangoli rettangoli. Dalle relazioni:

$$b = a \sin\beta \quad \text{e} \quad c = a \sin\gamma$$

possiamo ricavare che:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \sin\gamma = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

da cui segue:

$\beta \simeq 37°$ Con una calcolatrice, utilizzando la funzione inversa del seno

$\gamma =\simeq 53°$ Con una calcolatrice, utilizzando la funzione inversa del seno

In alternativa, per determinare le misure degli angoli del triangolo avremmo potuto utilizzare il secondo teorema sui triangoli rettangoli; da esso si ricava che $\beta = \arctan\frac{3}{4}$ e $\gamma = \arctan\frac{4}{3}$. In questo caso si risale agli angoli utilizzando la funzione inversa della tangente.

ESEMPIO Risoluzione di un triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un angolo acuto

Risolviamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo: $a = 6$, $\beta = 35°$.

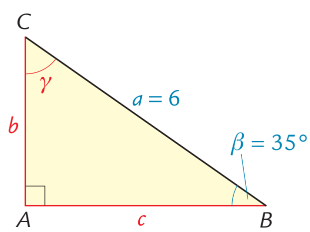
▸ Possiamo anzitutto ricavare la misura di γ:

$$\gamma = 90° - 35° = 55°$$

▸ Per determinare le misure dei cateti, utilizziamo il primo teorema sui triangoli rettangoli; osserviamo che, non conoscendo le funzioni goniometriche di un angolo di 35°, dobbiamo ricorrere necessariamente ai valori approssimati forniti dalla calcolatrice:

$c = a\cos\beta = 6 \cdot \cos 35° \simeq 4{,}91$ Arrotondando ai centesimi

$b = a\sin\beta = 6 \cdot \sin 35° \simeq 3{,}44$ Arrotondando ai centesimi



prova tu

1. In un triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa BC misura 20 e l'angolo β di vertice B è tale che $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Determina il perimetro del triangolo. [48]
2. In un triangolo rettangolo si ha: $b = 2$, $c = \sqrt{5}$; risolvi il triangolo. [$a = 3$, $\beta \simeq 42°$, $\gamma \simeq 48°$]
3. In un triangolo rettangolo si ha: $b = 10$, $\beta = 40°$; risolvi il triangolo. [$\gamma = 50°$, $a \simeq 15{,}56$, $c \simeq 11{,}92$]

ESERCIZI ➡ ➡ ➡ ➡
Gli esercizi relativi a questo paragrafo sono a p. **22**

Esercizi

1 Angoli e loro misure

➡ teoria a p. 1

Misure in gradi

Converti le seguenti misure di angoli, espresse in gradi, primi e secondi, in forma decimale. Arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.

1 $13° \, 25' \, 12''$ [$13{,}42°$]

2 $56° \, 44' \, 30''$ [$56{,}74°$]

3 $-15° \, 45' \, 30''$ [$-15{,}76°$]

4 $26° \, 5' \, 18''$ [$26{,}09°$]

5 $70° \, 17' \, 17''$ [$70{,}29°$]

6 $55° \, 20' \, 5''$ [$55{,}33°$]

7 $40° \, 10' \, 45''$ [$40{,}18°$]

8 $30° \, 55' \, 15''$ [$30{,}92°$]

Converti le seguenti misure di angoli, espresse in forma decimale, in gradi, primi e secondi. Arrotonda il numero che esprime i secondi a meno dell'unità.

9 $85{,}5°$ [$85° \, 30'$]

10 $25{,}4°$ [$25° \, 24'$]

11 $-50{,}8°$ [$-50° \, 48'$]

12 $20{,}6°$ [$20° \, 36'$]

13 $20{,}123°$ [$20° \, 7' \, 23''$]

14 $55{,}25°$ [$55° \, 15'$]

15 $45{,}27°$ [$20° \, 16' \, 12''$]

16 $51{,}246°$ [$51° \, 14' \, 46''$]

Misure in radianti

Converti in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi.

17 $30°; \quad 45°; \quad 60°$ $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$

18 $15°; \quad 135°; \quad 300°$ $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$

19 $75°; \quad 150°; \quad 225°$ $\left[\frac{5\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right]$

20 $20°; \quad 50°; \quad 200°$ $\left[\frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{18}; \frac{10\pi}{9}\right]$

21 $210°; \quad 220°; \quad 315°$ $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{9}; \frac{7\pi}{4}\right]$

22 $10°; \quad 100°; \quad 270°$ $\left[\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{9}; \frac{3\pi}{2}\right]$

23 $180°; \quad 330°; \quad 105°$ $\left[\pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{12}\right]$

24 $18°; \quad 40°; \quad 405°$ $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{2\pi}{9}; \frac{9\pi}{4}\right]$

Converti in gradi, primi e secondi le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

25 $\frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{4}$ [$30°; \, 60°; \, 45°$]

26 $\frac{7\pi}{2}; \quad \frac{5\pi}{4}; \quad \frac{11\pi}{3}$ [$630°; \, 225°; \, 660°$]

27 $\frac{5\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{8}; \quad \frac{11\pi}{6}$ [$150°; \, 22° \, 30'; \, 330°$]

28 $\frac{2\pi}{3}; \quad 4\pi; \quad \frac{\pi}{9}$ [$120°; \, 720°; \, 20°$]

29 $6\pi; \quad \frac{3\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{12}$ [$1080°; \, 135°; \, 15°$]

30 $\frac{11\pi}{12}; \quad \frac{10\pi}{3}; \quad \frac{7\pi}{6}$ [$165°; \, 600°; \, 210°$]

31 $\frac{13\pi}{8}; \quad \frac{9\pi}{4}; \quad \frac{2\pi}{9}$ [$292° \, 30'; \, 405°; \, 40°$]

32 $\frac{7\pi}{3}; \quad \frac{6\pi}{5}; \quad \frac{3\pi}{10}$ [$420°; \, 216°; \, 54°$]

Converti in gradi decimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti. Utilizza una calcolatrice e arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.

33 $2{,}5; \; 1{,}5; \; 3{,}8$ [$143{,}24°; \, 85{,}94°; \, 217{,}72°$]

34 $0{,}6; \; 4{,}2; \; 3{,}7$ [$34{,}38°; \, 240{,}64°; \, 211{,}99°$]

Converti in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi decimali. Utilizza una calcolatrice e arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.

35 $32{,}4°; \; 50{,}8°; \; 22{,}15°$ [0,57; 0,89; 0,39]

36 $24{,}8°; \; 35{,}6°; \; 80{,}32°$ [0,43; 0,62; 1,40]

37 Stabilisci in quale quadrante cade il secondo lato di un angolo posto in posizione normale avente la misura in radianti indicata.

a. $\frac{2\pi}{3}$ **b.** $\frac{5\pi}{4}$ **c.** 58,6 **d.** $\frac{11\pi}{6}$ **e.** 100,58

38 In un triangolo isoscele ciascun angolo alla base misura 35°. Qual è la misura in radianti dell'angolo al vertice? $\left[\frac{11\pi}{18}\right]$

39 Un triangolo ha un angolo che supera un altro di 20° e il terzo angolo misura 30°. Esprimi le misure in radianti dei tre angoli del triangolo. $\left[\frac{13\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right]$

40 L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 1 radiante. Qual è la misura in gradi, primi e secondi degli angoli alla base? Arrotonda a meno dell'unità il numero che esprime i secondi. $[61°\,21'\,8'']$

2 Le funzioni goniometriche

➡ teoria a p. 6

Esercizi preliminari

41 Spiega se può esistere:

a. un angolo α tale che $\sin\alpha = -0{,}001$
b. un angolo β tale che $\cos\beta = 1{,}001$
c. un angolo γ tale che $\tan\gamma = 3$

42 Completa la seguente tabella, supponendo che gli angoli siano tutti acuti.

Angolo	Seno	Coseno	Tangente
....	....	$\frac{1}{2}$	....
....	....	....	1
30°	....	....	....

43 Per quale dei seguenti angoli **non** è definita la tangente di α?

a. $\alpha = 0$ **c.** $\alpha = \pi$
b. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ **d.** $\alpha = 2\pi$

44 **Vero o falso?**

a. $\sin 30° + \sin 60° = \sin 90°$ V F
b. $\sin 60° = 2\sin 30°$ V F
c. $\cos(180° + 90°) = \cos 180° \cos 90° - \sin 180° \sin 90°$ V F
d. $\sin 180° = \sin 90° + \sin 90°$ V F
e. $\sin 90° = \cos 360°$ V F

[2 AFFERMAZIONI VERE E 3 FALSE]

45 Con l'aiuto di una calcolatrice, determina le funzioni goniometriche degli angoli indicati. Arrotonda i risultati a meno di un centesimo.

a. $\sin 70°$ **b.** $\tan 25°$ **c.** $\cos 52°$

46 Con l'aiuto di una calcolatrice, determina le funzioni goniometriche degli angoli indicati. Arrotonda i risultati a meno di un centesimo.

a. $\cos\frac{\pi}{7}$ **b.** $\tan\frac{2\pi}{5}$ **c.** $\sin\frac{7\pi}{36}$

Calcolo del valore di funzioni goniometriche di angoli notevoli

Semplifica le seguenti espressioni, ricordando i valori delle funzioni goniometriche degli angoli che hanno il secondo lato su uno degli assi cartesiani.

47 $\sin\frac{3\pi}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$ [1]

48 $\sin 90° \cos 90° + \sin 180° \cos 180°$ [0]

49 $\sin\pi(\cos\pi - \sin\pi) + \cos\pi$ [−1]

50 $(\sin 90° - \cos 270°)(\sin 180° - \cos 90°) + \cos 180°$ [−1]

51 $\sin 270° \cdot (\cos 90° - \sin 90°) + \cos 0°(\sin 90° - \cos 270°)$ [2]

52 $(\sin\pi + \cos\pi)^3 + \left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^3$ [0]

53 $\sin 180° \cos 90° + \cos 180° \sin 270°$ [1]

54 $\dfrac{\sin\pi + \tan\pi}{\cos\pi + \sin 2\pi}$ [0]

55 $\left(\sin^7\frac{\pi}{2}\cos^8\frac{3}{2}\pi + \sin^6\frac{3\pi}{2}\cos^5\frac{\pi}{2}\right)^3$ [0]

56 $(\sin 180° - \cos 180°)(\cos 90° - \sin 90°)(\sin 270° + \cos 270°)$ [1]

57 $\left(\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 1\right)\left(\sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} - 1\right) + \sin \pi \cos \pi$ [−1]

Semplifica le seguenti espressioni, ricordando anche i valori della funzioni goniometriche degli angoli di 30°, 45° e 60°.

58 $\sin 30° - \cos 60° + \tan 30° - \tan 60°$ $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

59 $(\sin 30° - \cos 60°)^2$ [0]

60 $\sqrt{2} \sin 45° + \sqrt{3} \sin 60° - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 30°$ $\left[\frac{13}{6}\right]$

61 $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{4}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

62 $\left(\sin \pi + \cos \pi + \tan \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}\right)$ [0]

63 $\left(\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3}\right)^2$ [0]

64 $\left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6}\right)^2$ [4]

65 $\tan \frac{\pi}{4}\left(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6}\right)\left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6}\right)$ [0]

66 $\left(\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi\right)\left(\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4}\right)$ $[-2\sqrt{2}]$

67 $\tan 30° \tan 60° + \sin 30° \cos 60° + \sin 60° \cos 30°$ [2]

68 $(\sin 30° + \cos 60°)(\cos 60° - \sin 30°)(\tan 45° - \sin 90°)$ [0]

Rappresenta l'angolo α che soddisfa le condizioni indicate e calcola i valori delle restanti funzioni goniometriche di α.

69 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\left[\cos \alpha = \frac{3}{5}; \tan \alpha = \frac{4}{3}\right]$

70 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\left[\cos \alpha = -\frac{4}{5}; \tan \alpha = \frac{3}{4}\right]$

71 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ $\quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ $\left[\cos \alpha = \frac{4}{5}; \tan \alpha = -\frac{3}{4}\right]$

72 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\left[\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

73 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\left[\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}; \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

74 $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\left[\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}; \tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

75 $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\left[\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}; \tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

76 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\left[\sin \alpha = \frac{3}{5}; \tan \alpha = \frac{3}{4}\right]$

77 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\left[\sin \alpha = \frac{1}{3}; \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

78 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\left[\sin \alpha = -\frac{1}{3}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

79 $\cos \alpha = \frac{7}{8}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\left[\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}\right]$

3 I grafici delle funzioni goniometriche

➡ teoria a p. 11

Esercizi preliminari

80 **Vero o falso?**

a. il dominio della funzione $y = \sin x$ è **R** V F

b. il dominio della funzione $y = \tan x$ è **R** V F

c. l'immagine della funzione $y = \sin x$ è **R** V F

d. l'immagine della funzione $y = \tan x$ è **R** V F

e. il periodo della funzione $y = \sin x$ è 2π V F

f. il periodo della funzione $y = \tan x$ è 2π V F

[3 AFFERMAZIONI VERE E 3 FALSE]

81 Traccia il grafico della funzione $y = -2 \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ dopo aver completato la seguente tabella.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					

82 Traccia il grafico della funzione $y = 3 \cos x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ dopo aver completato la seguente tabella.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					

83 Traccia il grafico della funzione $y = \sin 2x$ nell'intervallo $[0, \pi]$ dopo aver completato la seguente tabella.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y					

84 Traccia il grafico della funzione $y = 2 \cos 2x$ nell'intervallo $[0, \pi]$ dopo aver completato la seguente tabella.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y					

85 Traccia il grafico della funzione $y = 2\tan x$ nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dopo aver completato la seguente tabella.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y					

Traccia, per punti , i grafici delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato.

86 $y = 3 \sin x$ in $[0, 2\pi]$

87 $y = 2 \sin x$ in $[-\pi, \pi]$

88 $y = -\tan x$ in $[0, \pi]$

89 $y = -2 \cos x$ in $[0, 2\pi]$

90 $y = 4 \sin 2x$ in $[0, \pi]$

91 $y = 4 \cos 2x$ in $[-\pi, \pi]$

92 $y = -\tan \frac{x}{2}$ in $(-\pi, \pi)$

93 $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ in $[0, 4\pi]$

4 I teoremi sui triangoli rettangoli

➡ teoria a p. 16

Esercizi preliminari

94 In quale dei seguenti casi **non** risulta univocamente determinato un triangolo rettangolo?

☐ se conosciamo soltanto due cateti

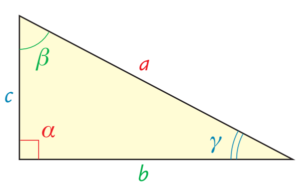
☐ se conosciamo soltanto un cateto e l'ipotenusa

☐ se conosciamo un lato e un angolo acuto

☐ se conosciamo i due angoli acuti

95 **Vero o falso?**

In riferimento alla figura qui sotto, stabilisci quali delle uguaglianze riportate a destra sono vere e quali sono false.



a. $\sin \gamma = \frac{c}{a}$ V F

b. $b = a \sin \beta$ V F

c. $\tan \gamma = \frac{b}{c}$ V F

d. $c = b \tan \beta$ V F

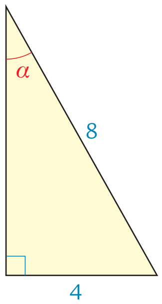
e. $a = \frac{c}{\cos \beta}$ V F

f. $b = a \cos \gamma$ V F

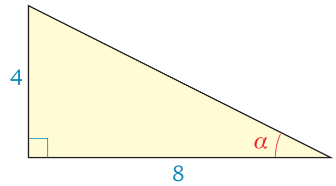
g. $c = \frac{b}{\tan \beta}$ V F

[5 AFFERMAZIONI VERE E 2 FALSE]

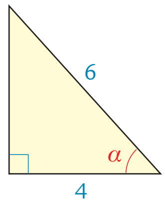
96 Completa il seguente schema.



$\sin\alpha =$ .....
$\cos\alpha =$ .....
$\tan\alpha =$ .....



$\sin\alpha =$ .....
$\cos\alpha =$ .....
$\tan\alpha =$ .....



$\sin\alpha =$ .....
$\cos\alpha =$ .....
$\tan\alpha =$ .....

Risoluzione dei triangoli rettangoli

97 ESERCIZIO GUIDATO

Risolvi i triangoli rettangoli di cui sono note le misure indicate:

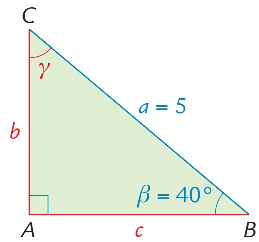
a. $a = 5,\ \beta = 40°$ **b.** $a = 6,\ b = 4$

Fai riferimento alle figure a fianco, in cui abbiamo indicato in rosso gli elementi che devi determinare.

a. Puoi anzitutto ricavare la misura di γ:

$\gamma = 90° - 40° =$ .....

Per determinare le misure dei cateti utilizza il primo teorema sui triangoli rettangoli:



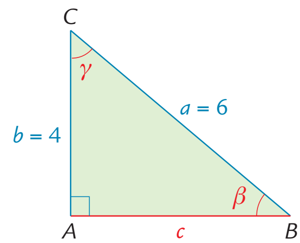
$c = a \cdot \cos\beta = 5 \cdot \cos 40° \simeq$ ..... Arrotonda ai centesimi con la calcolatrice

$b = a \cdot \sin\beta = 5 \cdot \sin 40° \simeq$ ..... Arrotonda ai centesimi con la calcolatrice

b. Applicando il teorema di Pitagora, puoi ricavare la misura dell'altro *cateto*:

$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{.....} = 2\sqrt{.....}$

Per ricavare le misure degli angoli acuti, utilizza il primo teorema sui triangoli rettangoli; dalle relazioni $b = a \sin\beta$ e $c = a \sin\gamma$ segue che:



$\sin\beta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{6} =$ ..... e $\sin\gamma = \dfrac{c}{a} = \dfrac{.....}{6}$

da cui:

$\beta \simeq$ ..... Con la calcolatrice, utilizzando la funzione inversa del seno

$\gamma \simeq$ ..... Con la calcolatrice, utilizzando la funzione inversa del seno

Risolvi i triangoli rettangoli di cui sono note le misure indicate, con l'aiuto della calcolatrice.

Nota. Nei risultati dei prossimi esercizi le misure in gradi sono espresse in forma decimale, arrotondate a meno di un centesimo.

98 $a = 10,\ \beta = 40°$ $[\gamma = 50°;\ b \simeq 6{,}43;\ c \simeq 7{,}66]$

99 $b = 5,\ \gamma = 35°$ $[\beta = 55°;\ a \simeq 6{,}10;\ c \simeq 3{,}50]$

100 $a = 10,\ c = 6$ $[b = 8;\ \beta \simeq 53{,}13°;\ \gamma \simeq 36{,}87°]$

101 $b = 5,\ c = 10$ $[a = 5\sqrt{5};\ \beta \simeq 26{,}57°;\ \gamma \simeq 63{,}43°]$

102 $a = 8,\ b = 6$ $[c = 2\sqrt{7};\ \beta \simeq 48{,}59°;\ \gamma \simeq 41{,}41°]$

103 $c = 10,\ \beta = 82°$ $[\gamma = 8°;\ a \simeq 71{,}85\ ;\ b \simeq 71{,}15]$

Risolvi i triangoli rettangoli di cui sono note le misure indicate, senza utilizzare la calcolatrice.

104 $a = 4,\ \beta = 30°$ $[\gamma = 60°;\ b = 2;\ c = 2\sqrt{3}]$

105 $b = 6,\ \gamma = 30°$ $[\beta = 60°;\ a = 4\sqrt{3};\ c = 2\sqrt{3}]$

106 $a = 8,\ c = 4$ $[\beta = 60°;\ \gamma = 30°;\ b = 4\sqrt{3}]$

107 $b = 6,\ c = 6$ $[\beta = \gamma = 45°; a = 6\sqrt{2}]$

108 $a = 4,\ b = 2\sqrt{3}$ $[\beta = 60°; \gamma = 30°;\ c = 2]$

109 $c = 4,\ \beta = 45°$ $[\gamma = 45°; a = 4\sqrt{2};\ b = 4]$

Problemi da risolvere con l'utilizzo della calcolatrice

Nota. Nei risultati dei prossimi esercizi le misure in gradi sono espresse in forma decimale, arrotondate a meno di un centesimo. Lasciamo a te convertire le misure in gradi, primi e secondi.

110 Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa BC è lunga 10 cm e $A\widehat{C}B = 40°$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro $\simeq$ 24,09 cm; Area $\simeq$ 24,62 cm^2]

111 In un triangolo rettangolo ABC il cateto AC è lungo 10 cm e il cateto AB è lungo 5 cm. Determina il perimetro e l'area del triangolo e l'ampiezza degli angoli acuti. [Perimetro $= (15 + 5\sqrt{5})$ cm; Area = 25 cm^2; 63,43° e 26,57°]

112 In un triangolo ABC risulta $AC = 3$ cm, $B\widehat{A}C = 40°$ e $A\widehat{B}C = 60°$. Determina il perimetro del triangolo. [*Suggerimento:* traccia l'altezza CH relativa ad AB; 8,64 cm]

113 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ il lato obliquo BC è perpendicolare alla diagonale AC. Sapendo che l'altezza del trapezio è 6 cm e che $A\widehat{B}C = 50°$, determina il perimetro del trapezio. [33,17 cm]

114 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 10 cm e l'ampiezza di uno dei due angoli acuti è 38°. Qual è la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa? [4,85 cm]

115 In un trapezio isoscele $ABCD$ la base minore CD è lunga 10 cm e i lati obliqui BC e DA sono lunghi 8 cm. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base maggiore sono di 53° , determina il perimetro e l'area del trapezio. [Perimetro $\simeq$ 45,63 cm; Area $\simeq$ 94,65 cm^2]

Problemi da risolvere senza l'utilizzo della calcolatrice

116 In un triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa BC è lunga 10 cm e $\sin A\widehat{B}C = \frac{4}{5}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro = 24 cm; Area = 24 cm^2]

117 Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa BC è lunga 10 cm e $\sin A\widehat{C}B = \frac{1}{5}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro $= (12 + 4\sqrt{6})$ cm; Area $= 4\sqrt{6}$ cm^2]

118 Nel triangolo rettangolo ABC il cateto AB è lungo 3 cm e $\tan A\widehat{C}B = 3$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [$(4 + \sqrt{10})$ cm; 1,5 cm^2]

119 Nel triangolo rettangolo ABC il cateto AB è lungo 12 cm e $\cos A\widehat{C}B = \frac{3}{5}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro = 36 cm; Area = 54 cm^2]